

De la acción al esquema: Un estudio sobre la construcción del concepto de derivación implícita en estudiantes de ingeniería

From action to schema: A study on the construction of the concept of implicit derivation in engineering students

Claudio Fuentealba^{1*}  <https://orcid.org/0000-0001-8071-5150>

Andrea Cárcamo¹  <https://orcid.org/0000-0001-5782-3479>

Recibido 19 de octubre de 2025, aceptado 23 de diciembre de 2025

Received: October 19, 2025 Accepted: December 23, 2025

RESUMEN

Esta investigación propone y valida empíricamente una descomposición genética, basada en la teoría APOE, para el aprendizaje del concepto de derivación implícita. Se analiza el impacto de una intervención didáctica, diseñada a partir de la descomposición genética y aplicada a 40 estudiantes de ingeniería, la cual enfatiza la coordinación entre representaciones gráficas y analíticas. Se recolectaron datos cualitativos mediante cuestionarios y entrevistas clínicas. Los resultados evidencian que la intervención promovió un tránsito desde concepciones de Acción (mecánicas) hacia las de Proceso y Objeto, lo que se tradujo en una mayor flexibilidad conceptual y la superación de errores comunes. Adicionalmente, el análisis reveló una dificultad no prevista en la coordinación de reglas de derivación, lo que condujo a un refinamiento de la descomposición genética para incluir una nueva construcción mental. Se concluye que la descomposición genética refinada constituye un modelo robusto para la enseñanza, validando el enfoque APOE como una herramienta efectiva para promover una comprensión estructural de la derivación implícita en la formación de ingenieros.

Palabras clave: Derivación implícita, educación en ingeniería, teoría APOE, descomposición genética, construcciones mentales.

ABSTRACT

This study proposes and empirically validates a genetic decomposition grounded in APOS theory to facilitate learning of implicit differentiation. The study analyzes the impact of a didactic intervention, developed using the genetic decomposition and implemented with 40 engineering students, that emphasizes coordination between graphical and analytical representations. Qualitative data were collected through questionnaires and clinical interviews. The results indicate that the intervention facilitated a transition from Action conceptions, characterized by mechanical application, to Process and Object conceptions, thereby resulting in greater conceptual flexibility and overcoming common errors. Additionally, the analysis revealed an unforeseen challenge in coordinating differentiation rules, prompting a refinement of the genetic decomposition to incorporate a new mental construction. The refined genetic decomposition is therefore considered a robust model for training, validating the APOS approach as an effective method to foster a structural understanding of implicit differentiation in engineers instruction.

Keywords: Implicit differentiation, engineering education, APOS theory, genetic decomposition, mental constructions.

¹ Universidad Austral de Chile. Centro de Docencia de Ciencias Básicas para Ingeniería. Valdivia, Chile. E-mail: cfuentealba@uach.cl; andrea.carcamo@uach.cl

* Autor de correspondencia: cfuentealba@uach.cl

INTRODUCCIÓN

La derivación implícita representa un pilar conceptual y procedimental dentro de los cursos de Cálculo destinados a estudiantes de ingeniería. Su aplicación es indispensable en diversas áreas de la disciplina, incluyendo la mecánica, la termodinámica y el análisis de sistemas de control, donde las relaciones entre variables físicas no siempre pueden expresarse de forma explícita [1]-[3].

Más allá de su aplicación curricular, el aprendizaje profundo de conceptos como la derivación implícita es fundamental en la formación de las competencias del ingeniero del siglo XXI. Los desafíos actuales en la industria y la sociedad raramente se presentan como problemas de libro de texto con una única solución algorítmica. Por el contrario, exigen innovación, pensamiento crítico y la habilidad de modelar situaciones complejas donde las variables están interconectadas de maneras no evidentes. Una formación matemática que se limita a la ejecución de procedimientos mecánicos no logra desarrollar estas habilidades de orden superior. Por lo tanto, la brecha entre el procedimiento y el concepto, documentada en el aprendizaje del cálculo, no es solo una dificultad académica, sino una barrera directa en la formación de ingenieros capaces de innovar y resolver problemas de forma creativa. Este estudio aborda dicha brecha, entendiendo que la construcción de un conocimiento conceptual robusto es la base del pensamiento ingenieril avanzado.

A pesar de esta relevancia, una vasta cantidad de investigación en educación matemática ha documentado de manera consistente las profundas dificultades que los estudiantes enfrentan al intentar comprender y aplicar este concepto. Los problemas reportados no se limitan a simples errores de manipulación algebraica o a la aplicación incorrecta de reglas de derivación [4], sino que parecen originarse en una frágil comprensión de la naturaleza de una función definida implícitamente.

Algunas investigaciones sostienen que muchos errores procedimentales, como la común omisión del término $\frac{dy}{dx}$ al aplicar la regla de la cadena, son en realidad evidencias de una deficiencia conceptual subyacente [5], [6]. Los estudiantes a menudo fallan en concebir cómo una ecuación que

relaciona a x e y puede definir localmente a una variable como función de la otra, lo cual constituye un prerrequisito fundamental para comprender la lógica detrás de este procedimiento de derivación. Esta dificultad, a menudo, se acrecienta por una enseñanza que, tradicionalmente, privilegia el conocimiento procedimental sobre la comprensión conceptual, una práctica que ha sido criticada por resultar en un aprendizaje superficial y propenso a errores [7], [8].

Para los futuros ingenieros, la brecha entre el procedimiento y el concepto es particularmente problemática. No solo deben saber cómo calcular una derivada implícita, sino, aún más importante, deben entender cuándo es apropiado usarla, qué representa geoméricamente el resultado y por qué el procedimiento (algoritmo) funciona. Desde este contexto, el trabajo tiene como objetivo principal proponer y validar empíricamente una descomposición genética para el aprendizaje de la derivación implícita. La validación se fundamenta en un análisis detallado de las construcciones mentales de estudiantes de ingeniería que participaron en una intervención didáctica. La investigación se centra, concretamente, en documentar la transición del razonamiento de los estudiantes desde un enfoque mecánico hacia una comprensión conceptual, estructural y flexible.

MARCO TEÓRICO

Dificultades Conceptuales y obstáculos en la derivación Implícita

La literatura especializada ha identificado un espectro de dificultades persistentes vinculadas a la derivación implícita. Se han clasificado los errores más frecuentes en dos tipos principales: algebraicos y de cálculo [4]. Los errores de tipo algebraico se manifiestan en problemas específicos como las dificultades para aislar factores comunes (complicaciones para factorizar $\frac{dy}{dx}$), la incorrecta simplificación de fracciones y el manejo inadecuado de los exponentes. Por su parte, los errores de cálculo están directamente relacionados con la aplicación incorrecta de las reglas de derivación, siendo un ejemplo fundamental la omisión o el uso erróneo de la regla de la cadena al diferenciar los términos que contienen la variable y . Sin embargo, otros trabajos argumentan que estos errores procedimentales son

a menudo síntomas de problemas conceptuales más profundos [9].

Utilizando la teoría APOE, se ha encontrado que muchos estudiantes no poseen una concepción de Proceso de función, lo que les impide entender cómo una ecuación de dos variables puede definir localmente a una variable como función de la otra [5]. Esta carencia obstaculiza la comprensión de por qué se debe aplicar la regla de la cadena al derivar términos que contienen a y . Asimismo, se ha señalado una disociación entre las representaciones gráfica y analítica [8], impidiendo que los estudiantes interpreten geoméricamente el significado de $\frac{dy}{dx}$ como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto.

Estos problemas se ven agravados por obstáculos didácticos, como el énfasis excesivo en ejercicios mecánicos que no promueven la reflexión [8], y obstáculos epistemológicos, como la idea contraintuitiva de que una relación que no es una función globalmente puede, sin embargo, ser diferenciable localmente [9], [10].

La teoría APOE

La teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) es una teoría constructivista y cognitiva que toma como base el principio de abstracción reflexiva de Piaget. Esta teoría busca explicar cómo un individuo construye conceptos matemáticos abstractos en su mente, pero también cómo estos se pueden enseñar de forma más efectiva [11]. Para comprender esta teoría, es fundamental recordar que se consideraba

el principio de abstracción reflexiva como el mecanismo primario para toda construcción mental, así como el medio por el cual cualquier estructura lógico-matemática se desarrolla en la mente del individuo [12]. A partir de esta premisa fundamental, la teoría APOE se plantea el objetivo de describir tanto la ruta como el proceso de construcción de las estructuras cognitivas lógico-matemáticas que realiza un individuo durante el aprendizaje de un concepto matemático en particular.

Concretamente, la teoría APOE postula que, para lograr la comprensión de un concepto matemático, un individuo transita por las construcciones mentales de Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE), a través de diversos mecanismos mentales [12], [13]. La Figura 1 muestra las relaciones existentes entre las estructuras y los mecanismos mentales propuestos la teoría APOE para la construcción de un concepto matemático particular.

Con base en la Figura 1, cabe señalar que la construcción de un nuevo concepto matemático se apoya en la transformación de conceptos previos que el individuo ya percibe como Objetos. De aquí, una Acción es una transformación de estos Objetos que es percibida por el individuo como externa, en el sentido de que cada paso requiere ser ejecutado de forma explícita, a menudo guiado por un estímulo externo [12]. Por ejemplo, un estudiante con una concepción de Acción de la derivación implícita necesitaría una ecuación específica como $x^2 + y^2 = 25$ y seguiría paso a paso un algoritmo para encontrar la derivada. Su razonamiento sería externo, y podría cometer errores como derivar y^2 simplemente como

Fuente: Adaptado de [10].

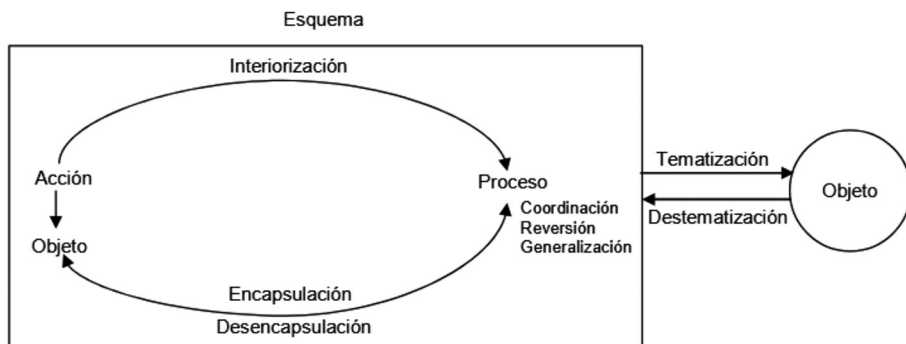


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales involucrados en la comprensión de un concepto matemático.

2y, al aplicar una regla memorizada sin comprender su fundamento, requiriendo una corrección externa para aplicar correctamente la regla de la cadena.

Cuando una Acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada para convertirse en un Proceso. Un Proceso es una estructura mental interna que permite al individuo tener control sobre la transformación; puede imaginarla, describir sus pasos, e incluso revertirlos, sin la necesidad de ejecutar cada paso explícitamente [12]. En el caso de la derivación implícita, un estudiante con una concepción de Proceso puede explicar por qué al derivar un término como y^2 con respecto a x se obtiene $2y \frac{dy}{dx}$. Es capaz de pensar en y como una función de x ($y = f(x)$) y describir la necesidad de la regla de la cadena, interiorizando así el procedimiento más allá de la simple aplicación de una regla externa.

Un Proceso se convierte en un Objeto cuando el individuo toma conciencia sobre él y es capaz de concebirlo como una totalidad a la que puede aplicar nuevas Acciones o Procesos. El mecanismo que permite este cambio de una concepción dinámica a una estática es la encapsulación. Lograr la encapsulación de un Proceso en un Objeto a menudo resulta difícil para los estudiantes [12]. Un estudiante que ha encapsulado el Proceso de derivación implícita puede tomar la expresión resultante, por ejemplo $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, y tratarla como un Objeto único. Sobre este Objeto puede realizar nuevas Acciones, como igualarlo a cero para encontrar los puntos donde la tangente a la curva es horizontal, o analizarlo para determinar el comportamiento de la pendiente en diferentes cuadrantes. Si es necesario, el individuo puede regresar al Proceso que dio origen al Objeto a través del mecanismo de desencapsulación.

Un Esquema para un concepto matemático es una colección coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas relacionados que un individuo puede emplear para resolver una situación matemática. La coherencia de un Esquema se refiere a la habilidad del individuo para determinar en qué situaciones es aplicable y en cuáles no. Un Esquema es una estructura dinámica que está en constante evolución y su construcción puede iniciar desde que el individuo realiza las primeras Acciones [12]. Un estudiante con un Esquema desarrollado de derivación implícita puede, por ejemplo, conectar el concepto con el de

tasas relacionadas, reconociendo que el principio fundamental es el mismo, aunque la variable de derivación cambie de x a t (tiempo). Además, puede coordinar fluidamente la representación analítica (la expresión de $\frac{dy}{dx}$) con la representación geométrica (la pendiente de la recta tangente en un gráfico) para analizar problemas complejos. Además, aunque no es el objeto de este trabajo, la teoría APOE estudia el desarrollo de un Esquema a través de la tríada intra-, inter- y trans- [14].

Propuesta de una descomposición genética para la derivación implícita

Para la teoría APOE, la descomposición genética es un elemento clave que corresponde a un análisis teórico que modela la epistemología del concepto analizado describiendo las construcciones mentales que el estudiante podría generar para aprenderlo [15], [16]. En este sentido, la descomposición genética constituye un modelo hipotético que detalla tanto las estructuras y como los mecanismos mentales que un estudiante debe construir para asimilar un concepto matemático determinado. Subrayan que la descomposición genética se formula inicialmente como una hipótesis sustentada en: la experiencia del investigador, la enseñanza y el aprendizaje del concepto, su conocimiento de este y de la teoría APOE, su bagaje matemático, la literatura publicada y la evolución histórica del concepto. Además, mientras una descomposición genética no se valide empíricamente, esta recibe el nombre de descomposición genética preliminar.

La intervención didáctica diseñada para esta investigación se estructuró a partir de la descomposición genética preliminar que diseñamos, considerando las construcciones mentales que están implicadas y su interacción, así como los conocimientos previos necesarios para trabajar con el concepto de derivación implícita:

Prerrequisitos:

- Estructuras de álgebra elemental concebidas como Procesos y un Esquema de ecuaciones.
- Un Esquema de función que incluya un Proceso de función explícita, abarcando nociones como su gráfica, dominio y la prueba de la línea vertical para la determinación de una función o relación.
- Un Esquema de derivada que incluya la derivada como un Proceso (coordinando sus

representaciones tanto gráfica como analítica) y el dominio de las reglas de derivación como Procesos.

- Un Esquema de la regla de la cadena que se encuentre al menos en una etapa de desarrollo Inter-, cuya coherencia esté dada por el concepto de composición de funciones. La construcción de este Esquema es en sí misma un desafío cognitivo significativo para los estudiantes.

Construcciones mentales de la descomposición genética preliminar:

A continuación, detallamos las construcciones mentales que un estudiante podría realizar para construir el concepto de derivación implícita.

1. Acción de relación entre variables: El estudiante comienza realizando acciones sobre ecuaciones dadas en la forma $F(x, y) = c$. Estas acciones consisten en sustituir un valor numérico para una variable (ej. x) y realizar los cálculos algebraicos necesarios para encontrar el valor correspondiente de la otra variable (ej. y). En esta etapa, la relación entre las variables es percibida como externa y dependiente de un cálculo concreto.
2. Acción de función local (vía gráfica): Se realizan acciones que vinculan la ecuación con su representación gráfica. El estudiante dibuja la curva correspondiente a $F(x, y) = c$ y, para un punto dado, identifica visualmente un segmento donde la gráfica pasa la prueba de la línea vertical. Este enfoque pedagógico, que utiliza la tecnología como un elemento mediador para vincular representaciones algebraicas y geométricas, ha sido explorado con éxito en otros conceptos abstractos del álgebra lineal.
3. Proceso de función implícita (vía gráfica): El estudiante interioriza la acción anterior. Ahora puede imaginar que una ecuación implícita define localmente a y como una función de x sin necesidad de dibujar la gráfica. Esta construcción aborda una de las principales dificultades señaladas en la literatura: la desvinculación entre la representación algebraica y geométrica.
4. Acción de derivación por sustitución (vía analítica): El estudiante realiza la acción de sustituir formalmente la expresión simbólica $f(x)$ en lugar de y dentro de una ecuación implícita, para luego derivar ambos lados con respecto a x y finalmente revertir la sustitución.
5. Proceso de derivación implícita: El estudiante interioriza la acción de sustitución, lo que le permite tratar a y de manera consistente como una función de x durante la derivación. Comprende que cada vez que deriva un término que contiene a y , debe aplicar la regla de la cadena. La correcta aplicación de la regla de la cadena en este contexto es uno de los errores de cálculo más comunes identificados [4].
6. Coordinación en un Proceso de Función Implícita Robusto: El estudiante coordina el entendimiento de la vía gráfica (Construcción 3) con el de la vía analítica (Construcción 5). Esta coordinación es fundamental, ya que los problemas en el aprendizaje del álgebra lineal y el cálculo a menudo surgen de la dificultad de los estudiantes para transitar entre diferentes registros de representación semiótica.
7. Acción de Interpretación Gráfica de la Derivada: Se realizan acciones que conectan el resultado del cálculo con la geometría. Para un punto específico (x_0, y_0) en una curva, el estudiante calcula el valor numérico de y' y lo compara con la pendiente de la línea tangente dibujada en ese punto.
8. Proceso de Interpretación Gráfica de la Derivada: El estudiante interioriza la acción anterior y es capaz de interpretar el resultado de una derivada implícita, $y'(x, y)$, como la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquier punto (x, y) . La habilidad de conectar las representaciones gráfica (pendiente) y simbólica (derivada) es un indicador clave de una comprensión profunda del concepto de derivada.
9. Encapsulación en un Objeto de Derivada Implícita: El estudiante encapsula el Proceso de derivación en un Objeto cognitivo. La expresión para y' se convierte en una entidad estática sobre la cual se pueden realizar nuevas acciones. Este salto cognitivo, donde un proceso dinámico se concibe como una entidad estática, es un paso fundamental en el pensamiento matemático avanzado.
10. Desarrollo de un Esquema de Derivación Implícita: El estudiante comienza a construir un Esquema coherente al establecer relaciones entre el Objeto de derivada implícita y otros Esquemas, como el de tasas relacionadas. La flexibilidad de este Esquema se manifiesta en la capacidad de coordinar de manera fluida las representaciones analíticas y geométricas para resolver problemas complejos.

La Figura 2 muestra un diagrama visual de la descomposición genética que da cuenta de las construcciones mentales que la componen y sus relaciones.

METODOLOGÍA

Este estudio se enmarca en un paradigma cualitativo con un enfoque interpretativo, centrado en explorar y comprender el significado que los individuos atribuyen a un problema [17]. En consonancia con este paradigma, se empleó un diseño empírico basado

en el análisis de las producciones de los estudiantes después de una intervención didáctica. El enfoque se centra en la naturaleza de las construcciones mentales de los participantes, buscando interpretar en profundidad sus procesos cognitivos en términos de la teoría APOE.

Participantes y contexto de la investigación

La muestra estuvo conformada por 40 estudiantes de primer año de ingeniería de la Universidad Austral de Chile, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico por conveniencia. Los criterios de

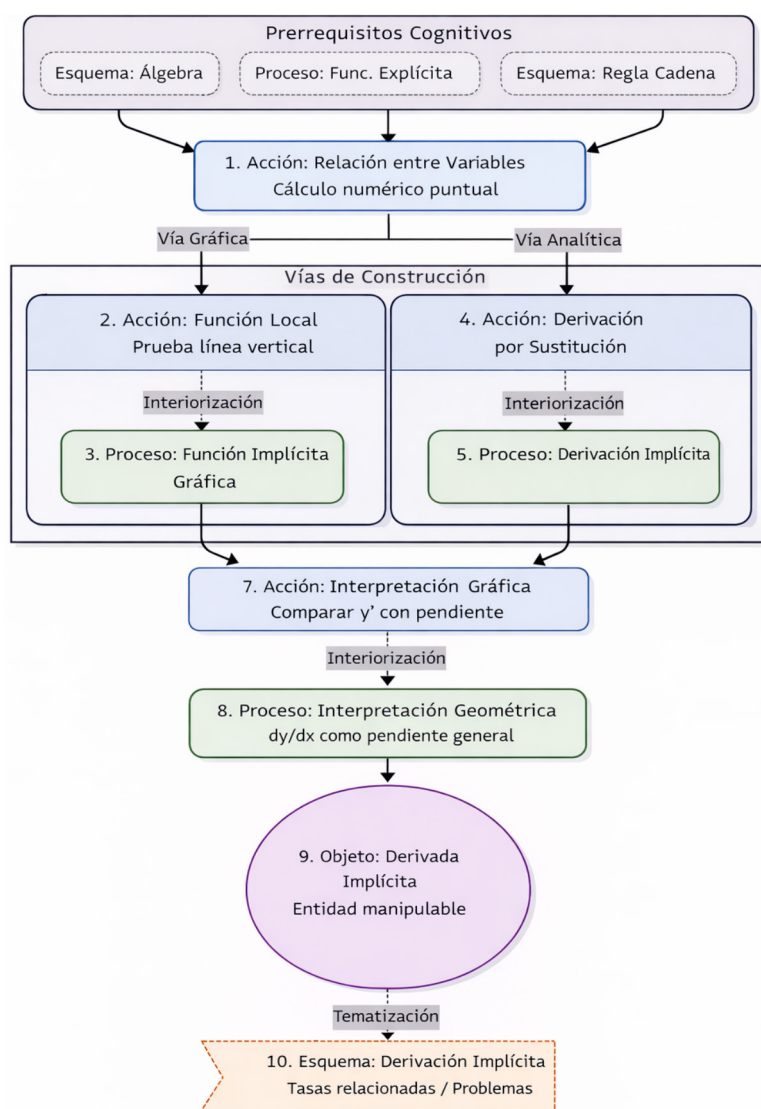


Figura 2. Diagrama que relaciona estructuras y mecanismos de las descomposición genética propuestas.

inclusión consideraron: haber aprobado los cursos previos de Álgebra y Geometría, estar cursando la asignatura de Cálculo en una Variable durante el segundo semestre y la firma del consentimiento informado. Por su parte, se excluyó a aquellos estudiantes que no asistieron a la totalidad de las sesiones de la intervención. Cabe señalar, que este grupo poseía características académicas y demográficas similares al promedio de la cohorte de ingreso a ingeniería en la universidad, lo que permite estudiar el fenómeno en un contexto ecológicamente válido para la institución.

Diseño y fases de la investigación

El diseño de la investigación se estructuró en tres fases secuenciales y bien definidas, con el propósito de validar empíricamente la descomposición genética propuesta. Este diseño permitió primero asegurar la idoneidad de los participantes, luego aplicar la intervención didáctica y, finalmente, recolectar evidencia sobre las construcciones mentales desarrolladas.

La primera fase consistió en la verificación de prerequisites. Antes de iniciar la intervención didáctica, se administró un cuestionario a los estudiantes participantes. El objetivo de este instrumento no fue medir su conocimiento sobre derivación implícita, sino confirmar que estos estudiantes poseían las construcciones mentales previas consideradas indispensables en la descomposición genética. Esto incluyó evaluar si contaban con un Proceso de función explícita y un Esquema funcional de la regla de la cadena, entre otros. Se verificó que mayor parte de los 40 estudiantes (34 de 40) que participaron de esta investigación cumplían con los criterios mínimos (prerequisites), asegurando así un punto de partida cognitivo casi homogéneo y pertinente para el desarrollo de esta investigación.

La segunda fase fue la intervención didáctica, que constituyó el eje central de la investigación. Durante un período de una semana, los estudiantes participaron de una secuencia de cuatro sesiones de enseñanza diseñadas a partir de la descomposición genética propuesta. Cada actividad, ejemplo y discusión de clase fue planificada intencionalmente para promover específicamente las construcciones mentales hipotetizadas en la descomposición genética.

La tercera fase correspondió a la evaluación y análisis de la intervención didáctica. Con este fin,

una semana después de la última sesión, se aplicó un cuestionario final a los 40 estudiantes para recolectar evidencia sobre las construcciones mentales logradas. Para profundizar en estos hallazgos y comprender el razonamiento detrás de las respuestas, se realizaron entrevistas clínicas semi-estructuradas con una submuestra de cuatro estudiantes. Estos estudiantes participaron de forma voluntaria en las entrevistas y representaban diferentes niveles de desempeño. Esta doble aproximación permitió, por un lado, caracterizar el impacto general de la intervención en todo el grupo y, por otro, obtener datos cualitativos detallados para ejemplificar y analizar en profundidad el pensamiento de los estudiantes, proveyendo así la evidencia necesaria para la validación y/o refinamiento de la descomposición genética propuesta.

La intervención didáctica

Cada una de las cuatro sesiones de la intervención (Tabla 1) comenzaba con una actividad inicial de 10 minutos, diseñada para abordar los conocimientos previos (prerequisites). Dada las características de los participantes, esta actividad tuvo un doble propósito. Para los 34 estudiantes que ya cumplían con los criterios mínimos, sirvió como una activación de conocimientos, es decir, una preparación cognitiva para que recordaran y tuvieran disponibles las estructuras mentales necesarias para la sesión. En cambio, para los 6 estudiantes que mostraron debilidades, esta fase funcionó como una nivelación focalizada, ofreciendo un refuerzo sobre los conceptos base. Por ejemplo, antes de la sesión de exploración gráfica, se realizó un breve repaso del concepto de función y la prueba de la línea vertical para discriminar una función de una relación. Del mismo modo, previo a la sesión de derivación implícita, se recordaron y practicaron ejemplos de la regla de la cadena para funciones explícitas. Esta práctica inicial diferenciada fue un control metodológico clave, permitiendo que las dificultades observadas durante la sesión principal pudieran atribuirse con mayor certeza al nuevo concepto de derivación implícita y no únicamente a las debilidades en los prerequisites.

Instrumentos y análisis de datos

Para la recolección de datos que permitieran validar la descomposición genética propuesta, se diseñaron y aplicaron dos instrumentos de carácter cualitativo: un cuestionario escrito y entrevistas

Tabla 1. Sesiones de la intervención didáctica.

Sesión	Construcción Mental	Actividades centrales y discusión (80 min)
1	Proceso de función implícita (vía gráfica).	El objetivo fue guiar a los estudiantes desde la Acción de relación entre variables hacia un Proceso de función implícita (vía gráfica). Trabajando en grupos, los estudiantes utilizaron el software GeoGebra para visualizar curvas definidas por ecuaciones implícitas (ej. $x^2 + y^2 = 25$). La exploración dinámica y la discusión grupal se orientaron a que interiorizaran estas Acciones en un Proceso, permitiéndoles concebir que una ecuación puede definir localmente a y como función de x , un prerequisite fundamental para el concepto.
2	Proceso de derivación implícita (vía analítica).	Esta sesión se enfocó en el Proceso de derivación implícita vía analítica. Se partió de la Acción de derivación por sustitución, donde se reemplazó formalmente y por $f(x)$ para hacer visible la composición de funciones. La discusión guiada en clase se centró en justificar la aparición del término $\frac{dy}{dx}$, vinculándolo directamente con la regla de la cadena. El objetivo era que los estudiantes no solo aplicaran una regla de memoria, sino que comprendieran su origen conceptual.
3	Encapsulación en un Objeto de derivada implícita.	Se promovió la encapsulación del Proceso en el Objeto de derivada implícita. Se plantearon problemas que exigían a los estudiantes realizar nuevas Acciones sobre la expresión $\frac{dy}{dx}$ ya obtenida. Por ejemplo, se les pidió determinar los puntos de una curva donde la tangente es horizontal, lo que requiere tomar la expresión de la derivada como una entidad única y analizar cuándo su valor es cero.
4	La construcción del esquema de derivación implícita.	La sesión final buscó observar el desarrollo del Esquema de derivación implícita. Se utilizaron problemas de aplicación en contextos variados, como las tasas relacionadas, que requerían que los estudiantes no solo aplicaran el algoritmo, sino que relacionaran el concepto de derivación implícita con otros Esquemas previos y coordinaran fluidamente sus representaciones analíticas y geométricas para resolver problemas complejos.

clínicas semi-estructuradas. El diseño de ambos instrumentos, clásicos de la teoría APOE, se fundamentó directamente en las construcciones y mecanismos mentales descritos en la descomposición genética, con el fin de obtener evidencias específicas sobre el razonamiento de los estudiantes.

Antes de su aplicación, tanto el cuestionario como el protocolo de entrevista fueron sometidos a una validación de contenido mediante juicio de expertos. Dos investigadores especialistas en Didáctica de la Matemática y Teoría APOE revisaron la correspondencia entre cada tarea y la construcción mental que pretendía medir (Tabla 2), realizándose ajustes menores en la redacción de los enunciados para asegurar su claridad.

El cuestionario

Se diseñó un cuestionario conformado por seis tareas, para ser resuelto de forma individual en

un tiempo máximo de 90 minutos. El propósito del cuestionario fue obtener una visión amplia de las construcciones mentales de los 40 estudiantes, a través de problemas que requerían desde la aplicación de procedimientos hasta la justificación y aplicación de conceptos vinculados a la derivación implícita en contextos variados. En la Tabla 2, se presentan las tareas y el objetivo de cada una en función de la descomposición genética propuesta.

Las entrevistas clínicas

Posteriormente a la aplicación del cuestionario, se realizaron entrevistas clínicas semi-estructuradas de 60 minutos de duración con cuatro estudiantes que aceptaron voluntariamente participar. Estos estudiantes fueron seleccionados por presentar diferentes niveles de desempeño en el cuestionario, con el fin de obtener una visión más diversa respecto a los razonamientos y construcciones mentales.

Tabla 2. Tareas del cuestionario y objetivos asociados.

Tarea	Enunciado	Objetivo
1	Encuentre $\frac{dy}{dx}$ para la curva definida por la ecuación: $x^3 + y^3 = 6xy$.	Evidenciar una concepción de Acción o Proceso de derivación implícita, evaluando la correcta aplicación del procedimiento de derivación.
2	Al derivar un término como $\cos(y)$ con respecto a x , el resultado es $-\sin(y) \frac{dy}{dx}$. Explique con sus propias palabras por qué es necesario incluir el factor $\frac{dy}{dx}$.	Evaluar la construcción de un Proceso de derivación implícita, verificando si el estudiante puede justificar conceptualmente el uso de la regla de la cadena.
3	Un estudiante derivó $x^2y = 1$ y su respuesta fue: $2x \frac{dy}{dx} = 0$. Identifique el error y explique el concepto que aplicó incorrectamente.	Sondear la robustez del Proceso de derivación implícita y el Esquema de las reglas de derivación.
4	Considere la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$: a) Encuentre $\frac{dy}{dx}$. b) Use el resultado para encontrar los puntos donde la tangente es horizontal.	Evidenciar la encapsulación del Proceso en el Objeto de derivada implícita, evaluando si el estudiante puede tratar la expresión de la derivada como una entidad sobre la cual realizar nuevas Acciones.
5	Para la curva $x^2 + y^2 = 9$, encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$.	Evaluar una concepción de Objeto consolidada, ya que requiere tratar $\frac{dy}{dx}$ como un Objeto que puede ser derivado nuevamente.
6	Una escalera de 5[m] está apoyada en una pared. Su base resbala, alejándose de la pared a 0,5 [m/s]. ¿A qué velocidad baja la parte superior de la escalera cuando la base está a 3[m] de la pared?	Sondear el desarrollo del Esquema, requiriendo la coordinación de la derivación implícita con el contexto de tasas de cambio relacionadas (derivar respecto a t).

El objetivo principal de las entrevistas fue aclarar y profundizar en las respuestas escritas de los estudiantes, explorando las dudas y los procesos de pensamiento que no son visibles en el papel. Por este motivo, no se utilizó un guion de preguntas fijo, sino que este se adaptó a las producciones (protocolos de resolución) de cada estudiante. El entrevistador utilizó preguntas de sondeo para incitar a los participantes a “pensar en voz alta”. Algunos ejemplos del tipo de preguntas realizadas se presentan en la Tabla 3.

Análisis de datos

El análisis de los datos fue de naturaleza cualitativa e interpretativa, con el propósito de buscar evidencias que permitieran validar la descomposición genética propuesta. Este modelo cognitivo hipotético sirvió como el principal lente analítico para interpretar las producciones de los estudiantes. El proceso se llevó a cabo de forma sistemática, comenzando con la codificación de los 40 cuestionarios y las transcripciones textuales de las cuatro entrevistas

clínicas. Los dos investigadores trabajaron de forma independiente, revisando cada respuesta y asignando códigos correspondientes a las construcciones mentales (Acción, Proceso, Objeto) definidas en la descomposición genética. Para asegurar la rigurosidad y fiabilidad de las interpretaciones, se realizó un proceso de triangulación entre ambos investigadores. Una vez finalizada la codificación individual, los investigadores se reunieron en dos sesiones de consenso para comparar sus análisis, discutir cualquier discrepancia interpretativa y llegar a un acuerdo unánime para cada evidencia. Este paso fue fundamental para garantizar la consistencia de los resultados. Asimismo, se aplicó una triangulación de datos para los cuatro estudiantes entrevistados, donde sus respuestas escritas en el cuestionario se contrastaron con sus explicaciones verbales en la entrevista. Este cruce de información permitió confirmar, refutar o enriquecer las inferencias iniciales sobre su razonamiento, obteniendo así una visión más profunda y válida de sus construcciones mentales. El resultado de este

Tabla 3. Ejemplos de preguntas de la entrevista clínicas.

Tarea asociada	Pregunta de sondeo	Propósito de la pregunta
1	Veó cómo derivaste el término $6xy$. ¿Puedes explicarme paso a paso tu razonamiento para llegar a ese resultado?	Distinguir entre una concepción de Acción (el estudiante recita los pasos de la regla del producto) y una de Proceso (el estudiante justifica por qué y se trata como una función de x en el producto).
2	En tu respuesta mencionas la “regla de la cadena”. ¿Puedes explicarme con tus propias palabras cómo la estás pensando en este problema?	Verificar si el conocimiento de la regla es una Acción memorizada o un Proceso interiorizado que el estudiante puede justificar conceptualmente.
3	¿Por qué crees que el estudiante se equivocó? ¿Qué idea o regla no entendió bien para cometer ese error?	Evaluar la robustez del Proceso de las reglas de derivación, observando si el estudiante puede articular el concepto subyacente mal aplicado por otro.
4	Veó que igualaste el numerador de la derivada a cero. ¿Qué estabas buscando geoméricamente en la elipse al hacer esa operación algebraica?	Determinar si el estudiante ha encapsulado la derivada en un Objeto, al verificar si puede conectar una Acción sobre la fórmula (álgebra) con su significado en el gráfico (geometría).
5	Al calcular la segunda derivada, tuviste que derivar el término $\frac{dy}{dx}$. ¿Cómo pensaste en él en ese momento: ¿como un número, una variable o una función?	Sondear directamente la concepción de Objeto. Un estudiante que lo ve como una función sobre la cual puede operar de nuevo muestra una encapsulación consolidada.
6	En este problema derivaste con respecto a ‘ t ’ (tiempo), pero en la Tarea 1 derivaste con respecto a ‘ x ’. ¿Puedes explicar la diferencia y por qué se hace así?	Evaluar la flexibilidad y coherencia del Esquema del estudiante, observando si puede adaptar y coordinar el concepto en un contexto de aplicación diferente.

proceso analítico fue una caracterización detallada del estado cognitivo de los estudiantes en términos de sus estructuras mentales, que fundamenta la presentación de resultados.

RESULTADOS

El análisis de los 40 cuestionarios y las cuatro entrevistas clínicas se enfocó en buscar evidencias que permitieran validar cada una de las construcciones mentales hipotetizadas en la descomposición genética. Los resultados se presentan de forma secuencial, contrastando las producciones de los estudiantes con las etapas del modelo cognitivo propuesto. Los datos no solo confirman la viabilidad de la mayor parte de la descomposición genética, sino que también revelan puntos de dificultad no anticipados que sugieren un refinamiento de esta.

A partir del análisis de las respuestas al cuestionario, se clasificó a los participantes según el nivel de construcción mental predominante alcanzado (Acción, Proceso u Objeto). La Tabla 4 resume esta distribución, vinculando cada nivel con los

indicadores de desempeño observados en las tareas específicas.

Validación de las construcciones iniciales

La primera parte de la descomposición genética propone que la construcción de un Proceso de función implícita puede ser promovida a través de vías gráficas y analíticas. Los datos de la intervención respaldan fuertemente esta parte del modelo. Concretamente, la intervención didáctica comenzó con la Acción de función local, donde los estudiantes utilizaron GeoGebra para visualizar curvas. El impacto de esta actividad fue evidente en las respuestas a la Tarea 4 del cuestionario. Por ejemplo, la respuesta del estudiante E_5 al inciso (a) que se muestra en la Figura 3.

Esta respuesta demuestra una sólida intuición geométrica. Contrariamente, la respuesta de E_{12} a la misma tarea e inciso del cuestionario fue “*No sé cómo saberlo sin calcular la derivada primero*”, evidenciando una dependencia total del procedimiento analítico y una falta de conexión con la representación gráfica. La interiorización

Tabla 4. Clasificación de estudiantes según nivel de construcción mental APOE alcanzado.

Construcción	Descripción del Indicador de Logro	Estudiantes (n = 40)	Porcentaje
Acción	Realizan el algoritmo de derivación (sustitución o fórmulas) pero dependen de reglas memorizadas sin justificación conceptual. No logran explicar el origen del término (Falla en Tarea 2).	14	35%
Proceso	Justifican conceptualmente el uso de la regla de la cadena y la composición de funciones (Éxito en Tarea 2 y 3). Conciben la función implícita localmente, pero no logran operar sobre la derivada resultante como un todo.	18	45%
Objeto	Encapsulan el proceso: tratan la expresión como una entidad estática a la que pueden aplicar nuevas acciones, como derivarla nuevamente () o analizar su nulidad (Éxito en Tareas 4b y 5).	8	20%

LA ELIPSE ES MÁS ANCHA QUE ALTA. LAS TANGENTES HORIZONTALES ESTARÁN EN LOS PUNTOS DE ARRIBA Y ABAJO, $(0, 2)$ y $(0, -2)$. LAS VERTICALES ESTARÁN EN LOS EXTREMOS, EN $(4, 0)$ y $(-4, 0)$.

Figura 3. Respuesta del estudiante E₅ a la tarea 4 inciso a).

de esta Acción en un Proceso se encontró en las entrevistas. La estudiante E₂₅ expresó su dificultad inicial y posterior comprensión “En el papel, la ecuación no me decía nada. Eran solo letras. Tuve que ver la animación en GeoGebra varias veces para entender que estábamos hablando de un pedacito de la curva, no de toda. Ahí entendí que localmente sí es una función”.

Por otra parte, en la Tarea 2 del cuestionario, que pedía justificar el uso de la regla de la cadena, 26 de los 40 estudiantes (65%) lograron articular una explicación conceptualmente correcta, validando la construcción de un Proceso de derivación implícita.

La respuesta escrita de la estudiante E₂₁ fue muy clara y precisa, como se muestra en la Figura 4.

En contraste, la respuesta de E₃₀ fue “Porque siempre que derivas y, tienes que poner y prima”. Esta respuesta, aunque lleva a un resultado correcto, es una regla memorizada sin justificación, característica de una concepción de Acción. De manera similar, en la Tarea 3 (análisis de error), 28 de 40 estudiantes (70%) identificaron correctamente la omisión de la regla del producto. La respuesta de E₁₀ fue: “El error es que se trató a x^2 como una constante al derivar. Es un producto de dos funciones, x^2 e $y(x)$, por lo que se debe aplicar la regla del producto”. Esta

Es necesario incluir $\frac{dy}{dx}$ porque estamos aplicando la regla de la cadena. Como y es una función de x , entonces $\cos(y)$ es una composición de funciones, $\cos(f(x))$. La derivada es la del coseno evaluada en y ; multiplicada por la derivada de la función de adentro, que es y .

Figura 4. Respuesta del estudiante E₂₁ a la tarea 2.

capacidad de diagnosticar un error conceptual en otro es una fuerte evidencia de un Proceso estable.

Validación de la encapsulación en el Objeto de derivada implícita

La descomposición genética propone que un Proceso robusto puede ser encapsulado en un Objeto cognitivo. Los datos indican que esta es una construcción cognitivamente más demandante, pero que fue alcanzada por una minoría de los estudiantes, validando su posición como una etapa avanzada en el modelo. Concretamente, las tareas 4b y 5, que requerían operar sobre la derivada, fueron resueltas con éxito solo por 8 de los 40 estudiantes (20%). El caso de E₁₉ es ilustrativo de un Proceso no encapsulado. Esto ya que calculó correctamente la derivada, pero no fue capaz de aplicar Acciones sobre ella como se muestra en la Figura 5.

Como se observa, el trabajo escrito del estudiante E₁₉ se detuvo abruptamente, mostrando que, aunque puede ejecutar el procedimiento (Proceso), no concibe la expresión resultante como un Objeto sobre el cual se pueden realizar nuevas operaciones (Acciones o Procesos).

Por otra parte, las entrevistas con los estudiantes proveyeron evidencia sólida de esta encapsulación. El estudiante E₄, uno de los 8 que resolvió la Tarea 5 (segunda derivada), explicó en su entrevista “La primera derivada es una función (Objeto) que te da la pendiente. La segunda derivada es otra

función (Objeto) que obtengo al derivar (operar) sobre la primera, y te indica si la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Te permite conocer la curvatura de la gráfica sin tener que dibujarla”. Esta verbalización muestra que no solo manipula el Objeto-derivada, sino que lo integra en un sistema de relaciones más amplio (concavidad/curvatura), lo que representa una concepción de Objeto muy consolidada.

Propuesta de refinamiento de la descomposición genética

Si bien la descomposición genética fue validada en sus construcciones mentales principales, el análisis detallado de los errores reveló una dificultad específica que el modelo preliminar que propusimos no había considerado explícitamente, sugiriendo la necesidad de un refinamiento. Concretamente, nuestra propuesta de descomposición genética asumió como prerrequisito un Esquema funcional de la regla de la cadena y un Proceso de la regla del producto, se observó una disociación significativa cuando ambas reglas debían coordinarse dentro de una misma expresión. Esta dificultad fue evidente al comparar el desempeño de distintos estudiantes en diferentes tareas. Por ejemplo, el estudiante E₂₈ derivó correctamente el término y^3 como $3y^2 \frac{dy}{dx}$ y el término $6xy$ como $6y + 6x \frac{dy}{dx}$ en la Tarea 1. Sin embargo, al ser consultado en la entrevista sobre cómo derivaría un término como $(xy)^3$, dudó y respondió “¿Tendría que usar la regla

a) Encuentre $\frac{dy}{dx}$: $x^2 + 4y^2 = 16 \quad / \frac{d}{dx}$

$$2x + 8y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad / -\frac{1}{2}$$

$$x + 4y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y \cdot \frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$$

b) Use el resultado para encontrar los puntos donde la tangente es horizontal: Para encontrar los puntos necesito un valor de x o y ... No sé cómo seguir...

Figura 5. Respuesta del estudiante E₁₉ a la tarea 4.

de la potencia primero y luego la del producto? ¿O al revés? No estoy seguro". Esta duda, presente en varios estudiantes, evidencia que la coordinación de ambas reglas no es una construcción trivial. La respuesta del estudiante E₁₅ a una pregunta similar fue aún más reveladora de esta lucha cognitiva *"La regla de la cadena es complicada y cuando está con el producto me enredo, no sé cuál va primero. Se siente como si fueran dos derivadas distintas a la vez"*.

Este hallazgo sugiere que no es suficiente que los estudiantes posean los Procesos de la regla de la cadena y la regla del producto de forma aislada. Por tanto, la descomposición genética debería ser refinada para incluir una construcción mental intermedia y explícita. Esta construcción mental debería corresponder a una coordinación de Procesos que debería estar situada después del "Proceso de derivación implícita" y antes de la "Encapsulación en Objeto". Su objetivo sería que el estudiante coordine el Proceso de la regla del producto con el Proceso de la regla de la cadena, para manejar exitosamente la derivación de funciones compuestas cuyo argumento es un producto, como por ejemplo $e^{x^2}y$ o $\ln(xy)$, entre otras. Este refinamiento haría de la descomposición genética un modelo más preciso, capaz de predecir y guiar la instrucción para una de las dificultades más sutiles y persistentes observadas en el estudio.

DISCUSIÓN

El objetivo principal de este trabajo fue proponer y validar una descomposición genética para la derivación implícita. Los resultados ofrecen un fuerte respaldo a la estructura general del modelo propuesto. La evidencia muestra que la intervención didáctica, diseñada a partir de la descomposición genética, facilitó efectivamente el tránsito de los estudiantes a través de las construcciones mentales hipotetizadas. La progresión observada, desde una dependencia de procedimientos mecánicos (Acción) hacia una comprensión justificada y flexible (Proceso y Objeto), se alinea con la trayectoria cognitiva descrita en la descomposición genética. Esto sugiere que el modelo no solo es teóricamente coherente con los principios de la teoría APOE, sino que también es empíricamente viable como un mapa para el aprendizaje de este concepto.

Uno de los aspectos más significativos de esta investigación es la validación de la importancia de

construir un Proceso de función implícita robusto. La literatura señala que una de los mayores problemas de los estudiantes es su dificultad para concebir que una ecuación pueda definir localmente a una variable como función de la otra. La descomposición genética propuso abordar esto a través de una vía gráfica inicial. Los resultados confirman la efectividad de este enfoque. La evidencia, tanto de los cuestionarios como de las entrevistas, sugiere que las actividades de visualización con GeoGebra permitieron a los estudiantes construir una imagen conceptual sólida de la función local, superando la disociación entre las representaciones gráfica y analítica mencionada [8]. Esta construcción gráfica inicial parece ser un prerequisite indispensable para que la aplicación analítica de la regla de la cadena adquiriera significado y no sea simplemente un paso memorizado.

Por otra parte, si bien la mayoría de los estudiantes logró construir un Proceso de derivación implícita, solo una minoría (8 de 40) mostró evidencias claras de haber encapsulado este Proceso en un Objeto. Este resultado es consistente con la teoría APOE, que postula que la encapsulación es un paso cognitivamente demandante. Las tareas del cuestionario diseñadas para evaluar esta construcción (Tareas 4, 5 y 6) actuaron como un claro diferenciador entre los estudiantes que podían ejecutar un procedimiento y aquellos que podían operar sobre él. Esto valida la posición del Objeto como una construcción avanzada dentro de la descomposición genética. Implica que, para la enseñanza, no es suficiente con que los estudiantes aprendan a "hacer" la derivación implícita; es necesario diseñar explícitamente problemas que los obliguen a "usar" la derivada como una herramienta de análisis para promover esta encapsulación.

Otras de las contribuciones importantes de los datos fue la revelación de una dificultad no anticipada en la descomposición genética preliminar: la coordinación de reglas de derivación. La descomposición genética asumía que un Proceso de la regla del producto y un Esquema de la regla de la cadena eran prerequisites suficientes. Sin embargo, los resultados mostraron que, incluso teniendo estos conocimientos de forma aislada, los estudiantes fallaban al intentar aplicarlos de manera coordinada. Esto tiene implicaciones importantes ya que refuerza la idea de que el conocimiento matemático no es

simplemente una suma de partes; la habilidad para integrar y coordinar diferentes Procesos es una construcción mental en sí misma. La propuesta de refinar la descomposición genética para incluir una construcción vinculada a la coordinación de Procesos aborda directamente esta brecha. Este refinamiento transforma la descomposición genética de un modelo descriptivo a uno más predictivo y pedagógicamente útil, ya que da luces una zona de dificultad que la enseñanza tradicional, enfocada en reglas aisladas, suele pasar por alto.

Nuestros hallazgos sobre la importancia de la visualización gráfica coinciden con lo reportado por Borji y Martínez-Planell [5], quienes advierten que la falta de una concepción de función impide la comprensión de la derivada implícita. Sin embargo, a diferencia de Kandeel [4], quien clasifica los errores de la regla de la cadena principalmente como procedimentales, nuestro estudio sugiere que la dificultad al coordinar la regla de la cadena con la del producto, por ejemplo, en $(xy)^3$, tiene una raíz cognitiva más profunda vinculada a la gestión de múltiples procesos simultáneos, lo que exige una atención explícita en la descomposición genética.

También, es importante reconocer las limitaciones de esta investigación. En cuanto a las limitaciones, al tratarse de un estudio cualitativo con una muestra intencionada, los resultados no pretenden ser generalizables estadísticamente a toda la población de estudiantes de ingeniería. Sin embargo, la descripción densa de las construcciones mentales permite la transferibilidad de los hallazgos a contextos educativos con características similares. Asimismo, la intervención didáctica fue de corta duración (una semana), lo que puede no ser suficiente para observar el desarrollo de construcciones más avanzadas como un Esquema consolidado o tematizado. Futuros estudios podrían abordar estas limitaciones con muestras más amplias e intervenciones más prolongadas.

Por otro lado, los resultados de este estudio trascienden el ámbito del aprendizaje del Cálculo para dialogar directamente con la formación de competencias para la innovación en ingeniería. El tránsito cognitivo descrito en la descomposición genética, desde una concepción de Acción hasta la construcción de un Objeto y un Esquema, es análogo al desarrollo del pensamiento ingenieril sofisticado.

Concretamente, un estudiante que opera en el nivel de Acción se asemeja a un técnico que aplica una fórmula sin comprender sus límites o su fundamento. Por su parte, la construcción de un Proceso representa el primer paso hacia el pensamiento de un ingeniero, la comprensión del “por qué” detrás de un método, lo que permite adaptarlo y verificarlo. Del mismo modo, la encapsulación en un Objeto, donde la derivada se convierte en una herramienta manipulable, es paralela a la competencia de abstracción, esencial en ingeniería para modelar un sistema complejo como un componente funcional. Finalmente, el desarrollo de un Esquema, que conecta la derivación implícita con otros conceptos como las tasas de cambio relacionadas, refleja el pensamiento sistémico, habilidad indispensable para la innovación, ya que permite al ingeniero ver las interconexiones entre diferentes partes de un problema.

Por lo tanto, una intervención didáctica como la propuesta no solo ayuda a construir un concepto matemático, sino que activamente entrena las estructuras cognitivas necesarias para la resolución de problemas complejos e innovadores. Al promover una comprensión conceptual y estructural, se está contribuyendo a formar ingenieros que no solo aplican el conocimiento existente, sino que están cognitivamente equipados para crear nuevas soluciones.

CONCLUSIONES

La principal contribución de esta investigación es la provisión de un modelo cognitivo empíricamente refinado para el aprendizaje de la derivación implícita. Más allá de simplemente validar una trayectoria teórica, el análisis de las construcciones mentales de los estudiantes reveló la necesidad crítica de incorporar una etapa explícita de coordinación de reglas de derivación dentro de la descomposición genética. Este refinamiento representa un avance en la comprensión de las dificultades específicas que enfrentan los estudiantes, señalando que la integración de conocimientos previos es una construcción mental en sí misma y no un prerequisite pasivo.

Desde una perspectiva pedagógica, los hallazgos instan a un cambio en la forma en que se aborda la derivación implícita en el aula de ingeniería. Se demuestra que un enfoque que privilegia la visualización gráfica inicial y la justificación conceptual de los

procedimientos es significativamente más efectivo que la mera instrucción algorítmica. La evidencia sugiere que, para construir una comprensión profunda y flexible, la enseñanza debe centrarse en facilitar la transición de los estudiantes desde la ejecución de Acciones mecánicas hacia la construcción de Procesos con significado y, finalmente, hacia la encapsulación de estos en Objetos matemáticos funcionales.

Si bien este estudio establece un modelo validado para una población específica, abre nuevas vías para la investigación futura. Queda por explorar el impacto a largo plazo de estas construcciones mentales en el aprendizaje de conceptos más avanzados, como las ecuaciones diferenciales. Asimismo, el diseño y la evaluación de materiales didácticos basados en la descomposición genética refinada, que puedan ser implementados a mayor escala, constituyen el siguiente paso lógico para transferir estos resultados a la práctica docente universitaria general en el área del Cálculo. Finalmente, se abre la posibilidad de realizar estudios comparativos que midan la efectividad de este enfoque frente a metodologías de enseñanza tradicionales.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Austral de Chile que participaron voluntariamente en este estudio. También, agradecemos a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile que financió este trabajo por medio del proyecto Fondecyt Regular N° 1241700.

REFERENCIAS

- [1] J. Stewart, *Single Variable Calculus: Early Transcendentals*, 7th ed. Belmont, CA, USA: Brooks/Cole, 2012.
- [2] R. Larson and B. H. Edwards, *Calculus*, 11th ed. Boston, MA, USA: Cengage Learning, 2016.
- [3] S.R. Jones, "An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts," *The Journal of Mathematical Behavior*, vol. 45, pp. 95-110, 2017, doi:10.1016/j.jmathb.2016.11.002.
- [4] R. Kandeel, "Learners' common errors in implicit differentiation: An analytical study," *Journal of Educational Research and Reviews*, vol. 9, pp. 198-207, 2021.
- [5] V. Borji and R. Martínez-Planell, "On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 105, pp. 163-179, 2020, doi: 10.1007/s10649-020-09991-y.
- [6] C.G. Chu, "Investigation of student understanding of implicit differentiation," Master thesis, Science and Mathematics Education, University of Maine, Orono, USA, 2019.
- [7] J. Engelbrecht, A. Harding, and M. Potgieter, "Undergraduate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 36, no. 7, pp. 701-712, 2005, doi:10.1080/00207390500271107.
- [8] V. Mesa, "Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach," *Educational Studies in Mathematics*, vol. 56, no. 2, pp. 255-286, 2004, doi:10.1023/B:EDUC.0000040409.63571.56.
- [9] A. Mirin and D. Zazkis, "Making implicit differentiation explicit," in *22nd Annual Conference: Research in Undergraduate Mathematics Education (RUME)*, Oklahoma, OK, USA, 2019, pp. 792-800.
- [10] M.J. Zandieh, "A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative," in *CBMS Issues in Mathematics Education*, vol. 8, E. Dubinsky, 2000, pp. 103-127.
- [11] M. Trigueros, "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior," *Educación Matemática*, vol. 17, no. 1, pp. 5-31, 2005.
- [12] I. Arnon et al., *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, New York, NY, USA: Springer, 2014.
- [13] C. Fuentealba y A. Cárcamo, "Dificultades en el desarrollo y tematización del esquema de integral definida," *Formación Universitaria*, vol. 18, no. 5, 2025, doi: 10.4067/s0718-50062025000500101.
- [14] J. Piaget and R. Garcia, *Psychogenesis and the History of Science*, New York, NY, USA: Columbia University Press, 1989.

- [15] M. Asiala, J. Cottrill, E. Dubinsky, and K.E. Schwingendorf, "The development of students' graphical understanding of the derivative," *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 16, no. 4, pp. 399-431, 1997, doi:10.1016/S0732-3123(97)90015-8.
- [16] Z.M.M. Jojo, "An APOS exploration of conceptual understanding of the chain rule in calculus by first year engineering students," Ph.D. dissertation, Faculty of Education, University of Kwa-Zulu Natal, Edgewood, South Africa, 2011.
- [17] J.W. Creswell and J.D. Creswell, *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*, 5th ed. Los Angeles, CA, USA: SAGE Publications, 2017.